Keplers love

Skrevet af Jacob Larsen 3.år HTX Slagelse
Udgivet i samarbejde med Martin Gyde Poulsen 3.år HTX Slagelse

De 3 Love

På baggrund af den danske astronom Tycho Brahes observationer. Det var især parallaksemålinger af Mars' placering på nattehimlen, der sporede Kepler i retning af sin berømte første lov om planeternes ellipsebaner. Men der kom i alt 3 meget vigtige love i perioden 1609-1619:

1. **Planeterne bevæger sig i ellipseformede baner om Solen, med Solen i det ene brændpunkt.**
2. Det af radiusvektor (mellem Solen og en planet) overstrøgne areal er ens i lige store tidsrum.
3. Betegner r en planets middelafstand fra Solen, og T dens omløbstid, så gælder $\frac{r^3}{T^2} = konst$.

Keplers 1. lov

Fra matematikken defineres en ellipse som: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - hvor a er storaksen og b er lilleaksen

Forskellen på en cirkel og en ellipse et at ellipsen er *excentrisk*. Der er et mål for afstanden mellem brændpunkterne divideret med den dobbelte storakse.

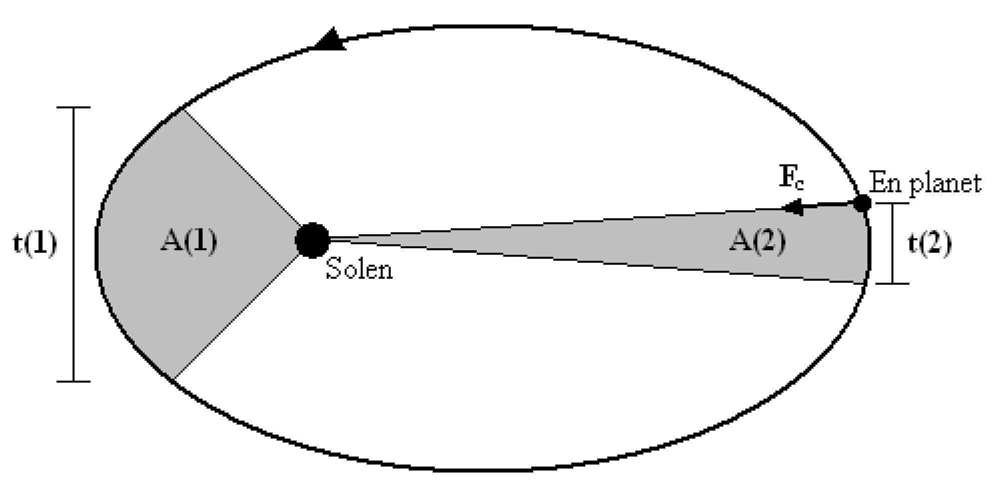
$e = \frac{|F_1F_2|}{2a}$ - Bemærk at dette gælder: $0 < e < 1$ - jo tættere på 0 jo mere cirkelformet.

Hvor F_1 og F_2 er de 2 brændpunkter, hvoraf Solen er placeret i det ene.

Men hvis astronomer i fortiden har troet at planeterne bevægede sig i cirkelbaner så er de lovlig undskyldt. Det forholder sig nemlig således for de mest kendte planeters *excentricitet*:

	Storaksen *a* (A.E)	Omløbstid T (år)	Excentricitet *e*
Merkur	0,387	0,241	0,201
Venus	0,723	0,615	0,007
Jorden	1,000	1,000	0,017
Mars	1,524	1,88	0,093
Jupiter	5,203	11,86	0,048
Saturn	9,555	29,42	0,056
Uranus	19,218	83,75	0,046
Neptun	30,110	163,72	0,009
Pluto	39,545	248,02	0,249

Keplers 2. lov



Figur 1

Tegningen skal illustrerer en planets ellipsebane med Solen i det ene brændpunkt. Radiusvektor er den forbindelseslinie, man imaginært kan trække mellem Solen og planeten. Hvis Keplers anden lov skal passe kan man da konkluderer:

$t_1 = t_2$ - t står for tidsrum

$A_1 = A_2$ - A står for areal

$$\frac{A_1}{t_1} = \frac{A_2}{t_2} = konst$$

Hvis man ser logisk på det, så må forklaringen på dette være at planeten har en øget hastighed, når den er tæt på Solen i forhold til når den er længere væk. Således kan den nå længere på samme tid. Men der er også en tilsvarende mekanisk måde at anskue denne påstand på.

Planetens baneimpulsmoment er konstant. Man kan da opstille formlen:

$$L = \vec{r} \times \vec{v} \cdot m$$

m og L er konstante. Hvis radiusvektors længde så bliver mindre idet planeten komme tættere på solen, så må hastighedsvektoren jo blive større, hvis udtrykket stadig skal blive L.

Bevis for Keplers 2. lov

Idet man anser situationen på figur 1 som et system i ligevægt, hvilket vil sige at kraftmomentet for planetens bevægelse er nul, bliver planetens impulsmoment konstant.

$$\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{t}} = \mathrm{M} = 0 \;\; - \;\; \mathrm{L} = konst$$

Ser man nu på en isoleret del af systemet som består at ét af de to arealer, der overstryges af radiusvektor i et meget lille tidsrum. Er impulsmomentet givet ved:

$$\Leftrightarrow \mathrm{L} = \vec{r} \times p$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{L} = \vec{r} \times \vec{v} \cdot m$$

Hastighedsvektoren er en tangent til ellipsebevægelsen. Dette bevirker at radiusvektor og hastighedsvektor er vinkelret på hinanden, hvorved følgende gælder:

$$\Leftrightarrow \mathrm{L} = r \cdot v \cdot m$$

Hastigheden er tilnærmelsesvis konstant ved $v \approx s/\mathrm{t}$, fordi man ser på et lille tidsrum Hvori s er den buelængde planeten tilbagelægger:

$$\Leftrightarrow \mathrm{L} = r \cdot \frac{s}{\mathrm{t}} \cdot m$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{L} = m \cdot \frac{r \cdot s}{\mathrm{t}} \quad (1)$$

Nu vender man for en kort bemærkning tilbage til arealet. I ét meget lille tidsrum er arealer givet ved A ≈ (1/2)·r·s hvilket kan omskrives til:

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{A} = r \cdot s \quad (2)$$

Nu samles (1) og (2) til: $\mathrm{L} = m \cdot \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{t}}$

$$\frac{\mathrm{L}}{2 \cdot m} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{t}}$$

Idet både L og m er konstante kan man udlede følgende: $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{t}} = konst$

Idet forholdet mellem et vist areal og et vist tidsrum altid er konstant, anses Keplers anden lov for at være bevist.

Bevis for Keplers 3. lov

Selvom Newton først lancerede massetiltrækningsloven i 1687, på baggrund af Keplers love. Så er det nemmest at bevise Kelpers 3. lov ved hjælp af denne.

Denne lov lyder: $\mathrm{F_g} = \mathrm{G} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ $\qquad$ $\mathrm{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{Nm^2}{kg^2}$

Hvor m_1 og m_2 er 2 legemer og $\mathrm{F_g}$ er tiltrækningskraften mellem disse 2 legemer.

For at et legeme kan lave en cirkulær bevægelse, skal der være en centripetalkraft $\mathrm{F_{cp}}$. Denne er givet ved Newton anden lov: $\mathrm{F_{cp}} = m \cdot a_{\mathrm{cp}}$

Hvor centripetalaccelerationen er givet ved: $a_{\mathrm{cp}} = \omega^2 \cdot r$ hvormed det fås at: $F_{\mathrm{cp}} = m \cdot \omega^2 \cdot r$

Mellem en vilkårlig planet og Solen, hvorimellem der er afstanden r er $\mathrm{F_g} = \mathrm{F_{cp}}$. *Så vil* m_1 *være givet ved Solmassen* M_o *og* m_2 *vil være givet den vilkårlige planets masse m. Herudfra fås:*

$\Leftrightarrow m \cdot \omega^2 \cdot r = \mathrm{G} \cdot \frac{M_o \cdot m}{r^2}$ - hvor vinkelhastigheden ω opfylder $\frac{2\pi}{T}$.

$$\Leftrightarrow m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = \mathrm{G} \cdot \frac{M_o \cdot m}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = \mathrm{G} \cdot \frac{M_o}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2} = \mathrm{G} \cdot M_o$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathrm{G} \cdot M_o}{4\pi^2}$$

Idet at G er en konstant og at M_o er en konstant, finder man at: $\frac{r^3}{T^2} = konst$

	r^3/T^2
Merkur	1,002
Venus	1,001
Jorden	1,000
Mars	0,999
Jupiter	0,999
Saturn	0,992
Uranus	0,988
Neptun	0,982
Pluto	0,995

Slut

De naturvidenskabelige

Jacob Larsen og Martin Gyde Poulsen
Evt. fejl og mangler kan sendes til gyde@rudekuvert.dk