Cirkler

Skrevet af Jacob Larsen 3.år HTX Slagelse
Udgivet i samarbejde med Martin Gyde Poulsen 3.år HTX Slagelse

Indholdsfortegnelse

Cirklens ligning

En cirkel udtrykkes ved en række punkter som alle ligger i samme afstand fra et givent centrum. Dette betyder at man skal have fat i afstandsformlen, for at beskrive en cirkel:

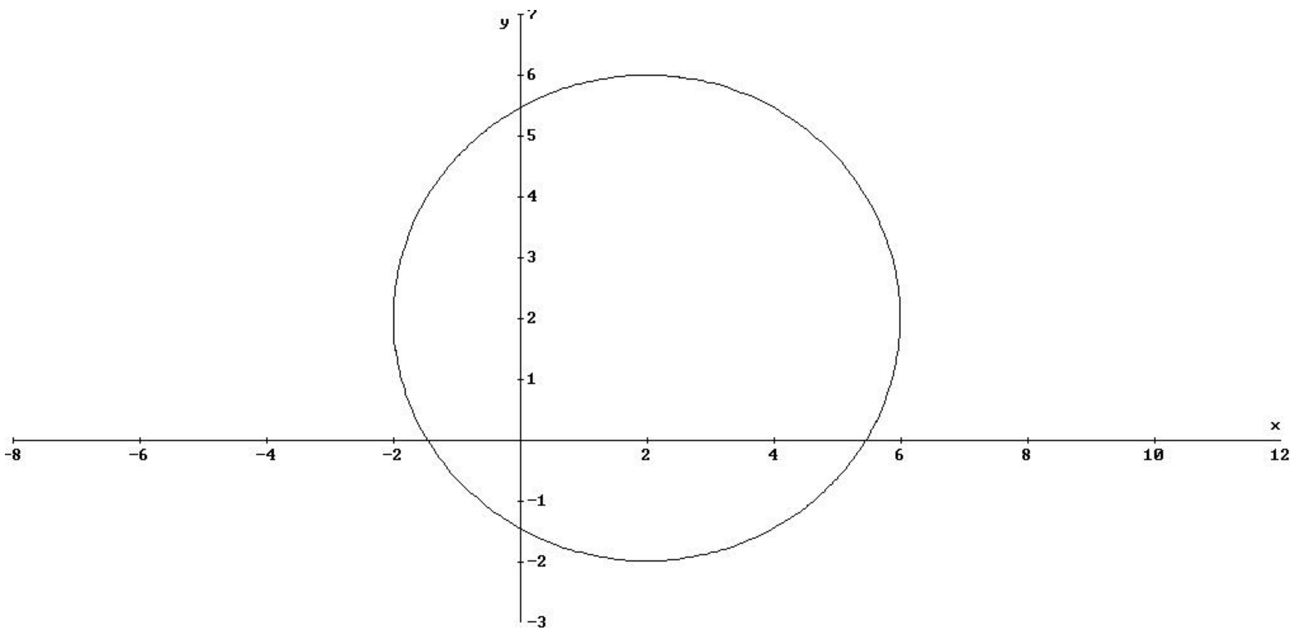
Hvis cirklen radius er givet ved r og cirklen centrum er givet ved koordinaterne (x_0;y_0). Så er cirklen givet ved ligningen:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Eksempler på tegning af cirkler

Cirkel med centrum (2 ; 2) og en radius på 4:

$$4^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$$



Der findes en lidt speciel cirkel som bruges i den trigonometriske lære. Den hedder enhedscirklen og er givet følgende ligning:

$$1^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$$
$$\Leftrightarrow 1 = x^2 + y^2$$

Heraf kan det ses at den har radiusen 1 og den har centrum i origo (0;0).

Skæring mellem cirkel og x-aksen

Eksemplet som brugt før anvendes igen. Ved en cirkels nulpunkter er y-værdien lig med nul. Denne konsekvens indsættes i cirklens ligning hvorefter parenteserne ophæves.

$$
\begin{aligned}
&4^2 = (x-2)^2 + (0-2)^2 \\
&\Leftrightarrow 16 = x^2 - 4x + 4 + 4 \\
&\Leftrightarrow 16 = x^2 - 4x + 8 \\
&\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x - 8
\end{aligned}
$$

Nu har man jo en andengradsligning. Denne skal man løse traditionelt.

$$
\begin{aligned}
&d = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) \\
&\Leftrightarrow d = 48
\end{aligned}
$$

De to nulpunkter er nu givet ved:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 1} \qquad \underline{\underline{x_1 = 5{,}46}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{x_2 = -1{,}46}}$$

Skæring mellem cirkel og y-aksen

Man kan også afgøre hvor cirklen skærer y-aksen. Ved disse punkter er x-værdien lig med nul. Denne konsekvens indsættes i cirklens ligning hvorefter parenteserne ophæves.

$$
\begin{aligned}
&4^2 = (0-2)^2 + (y-2)^2 \\
&\Leftrightarrow 16 = 4 + y^2 - 4y + 4 \\
&\Leftrightarrow 16 = y^2 - 4y + 8 \\
&\Leftrightarrow 0 = y^2 - 4y - 8
\end{aligned}
$$

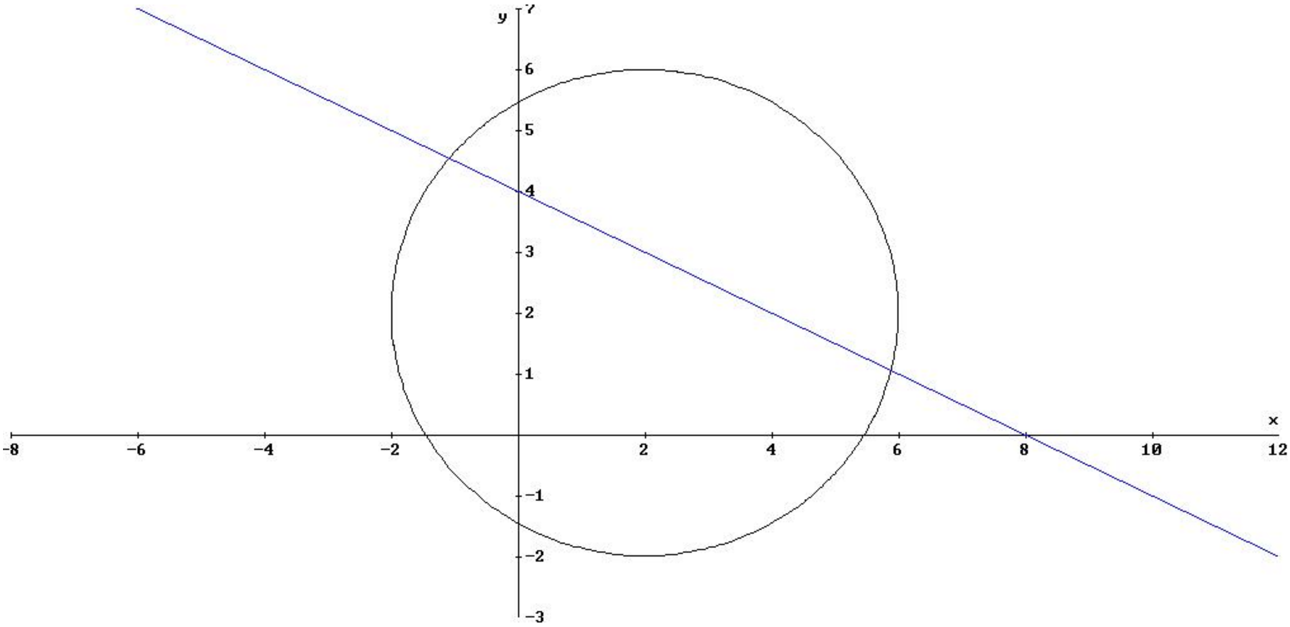
Igen finder man en andengradsligning. På trods af at den variable hedder y kan man stadig godt bruge den samme teori:

$$
\begin{aligned}
&d = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) \\
&\Leftrightarrow d = 48
\end{aligned}
$$

De to nulpunkter er nu givet ved:

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 1} \qquad \underline{\underline{y_1 = 5{,}46}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{y_2 = -1{,}46}}$$

Skæring mellem cirkel og en ret linie



Her har man en cirkel som er givet ved ligningen:

$$4^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$$

og en ret linie som er givet ved ligningen:

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 4$$

Ved skæringer mellem linier (og andre grafer, for den sags skyld) eksisterer der koordinatsæt, hvor cirklens og liniens x- og y-værdier er ens. At ligningen for en linie er en funktion for y indikerer, at man kan finde disse punkter ved at substituerer denne med y i cirklens ligning:

$$4^2 = (x-2)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}x + 4 - 2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 16 = (x-2)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\right)^2$$

Nu ophæves parenteserne og ligningen reduceres:

$$16 = x^2 - 4x + 4 + \tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$
$$\Leftrightarrow 16 = 1{,}25x^2 - 6x + 8$$
$$\Leftrightarrow 0 = 1{,}25x^2 - 6x - 8$$

Denne andengradsligning har den særlige egenskab, at den skærer x-aksen de præcis de punkter hvor cirklen og linien også skærer hinanden. Dette betyder at man med den kendte teori om andengradspolyoniet, kan finde skæringspunkterne mellem en linie og en cirkel.

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 1,25 \cdot (-8)$$
$$\Leftrightarrow d = 76$$

De to nulpunkter er nu givet ved:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{76}}{2 \cdot 1,25} \qquad x_1 = 5,89 \quad \wedge \quad x_2 = -1,09$$

Nu mangler man kun at finde y-værdierne til disse x-værdier for at kende de to skæringspunkter. Som allerede står skrevet, er en ret linies ligning en funktion af x som giver y. Dette betyder jo at man kan bruge denne ligning til at bestemme en y-værdi, hvis man kender x som man i dette tilfælde gør:

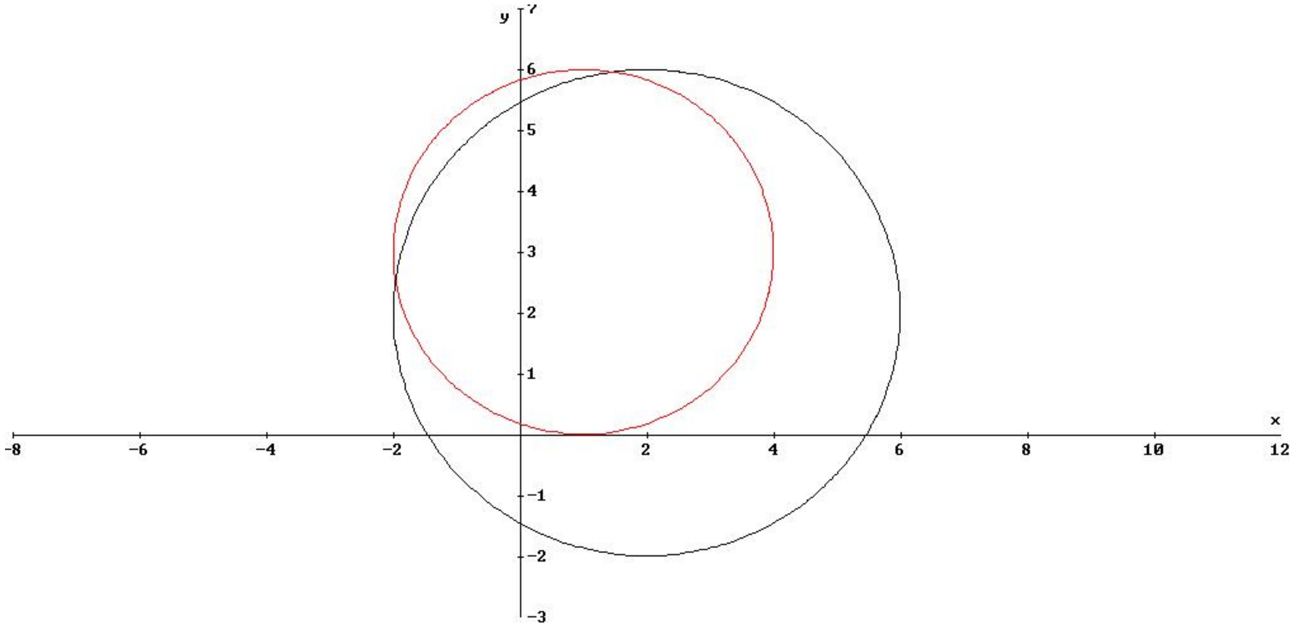
$$y_1 = -\tfrac{1}{2}(5,89) + 4$$
$$\Leftrightarrow y_1 = 1,06$$

Heraf fastsættes det ene skæringspunkt til <u>(5,89;1,06)</u>

$$y_1 = -\tfrac{1}{2}(-1,09) + 4$$
$$\Leftrightarrow y_1 = 4,55$$

Heraf findes det andet skæringspunkt til <u>(-1,09;4,55)</u>

Skæring mellem 2 cirkler



Her har man de to cirkler som er givet ligningerne:

$$\text{Cirkel 1:} \quad 4^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$$
$$\text{Cirkel 2:} \quad 3^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$

\- cirkel 1 er den sorte og cirkel 2 er den røde

Skæringen mellem findes ved at man først ophæver parenteserne og dernæst reducerer ligningerne så de er lig med 0:

$$\text{Cirkel 1:} \quad 16 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$
$$\text{Cirkel 2:} \quad 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Cirkel 1:} \quad 16 = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8$$
$$\text{Cirkel 2:} \quad 9 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Cirkel 1:} \quad 0 = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8$$
$$\text{Cirkel 2:} \quad 0 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1$$

da det handler om at finde en skæring, altså ved de værdier hvor de 2 ligninger en ens, sættes de lig med hinanden, da man derved finder disse værdier.

$\text{Cirkel } 1 = \text{Cirkel } 2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1$

Det ses herved at ledene x^2 og y^2 forsvinder ud af udregningen, da de står på begge sider af ligheds-tegnet. Det tilbageværende reduceres yderligere:

$-4x - 4y - 8 = -2x - 6y + 1$

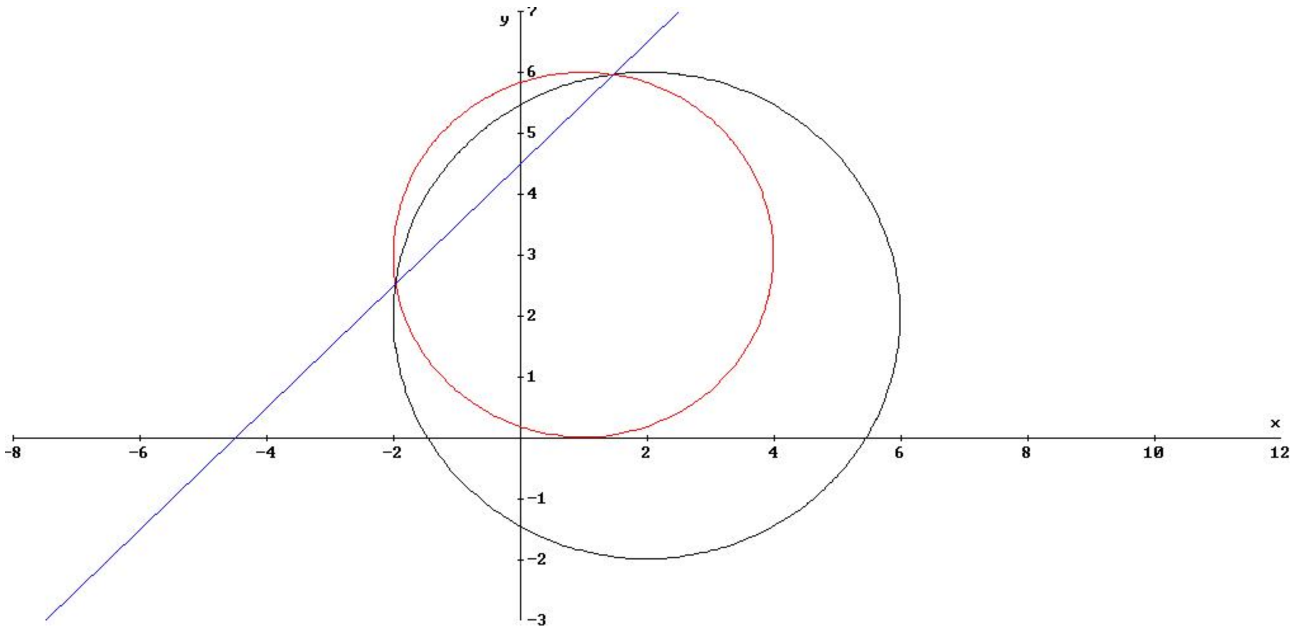
$\Leftrightarrow -1 = 2x - 2y + 8$

$\Leftrightarrow 0 = 2x - 2y + 9$

$\Leftrightarrow 2y = 2x + 9$

$\Leftrightarrow y = x + 4{,}5$

Den førstegradsfunktion som man nu har fået ud af det, er forskrift for en ret linie i et koordinat-system, med den særlige egenskab at den går igennem de to skæringspunkter mellem cirklerne.



Herefter kan man bare finde skæringspunkterne mellem en af cirklerne og den rette linie. Det vælges her at finde skæringen mellem cirkel 1 og linien.

$4^2 = (x-2)^2 + (x + 4{,}5 - 2)^2$

$\Leftrightarrow 16 = (x-2)^2 + (x + 2{,}5)^2$

$\Leftrightarrow 16 = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 5x + 6{,}25$

$\Leftrightarrow 16 = 2x^2 + x + 10{,}25$

$\Leftrightarrow 0 = 2x^2 + x - 5{,}75$

Nulpunkterne findes:

$$d = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5,75)$$
$$\Leftrightarrow d = 47$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{47}}{2 \cdot 2} \qquad x_1 = 1,46 \quad \wedge \quad x_2 = -1,96$$

y-værdierne bestemmes ved at sætte x ind i ligningen for den rette linie:

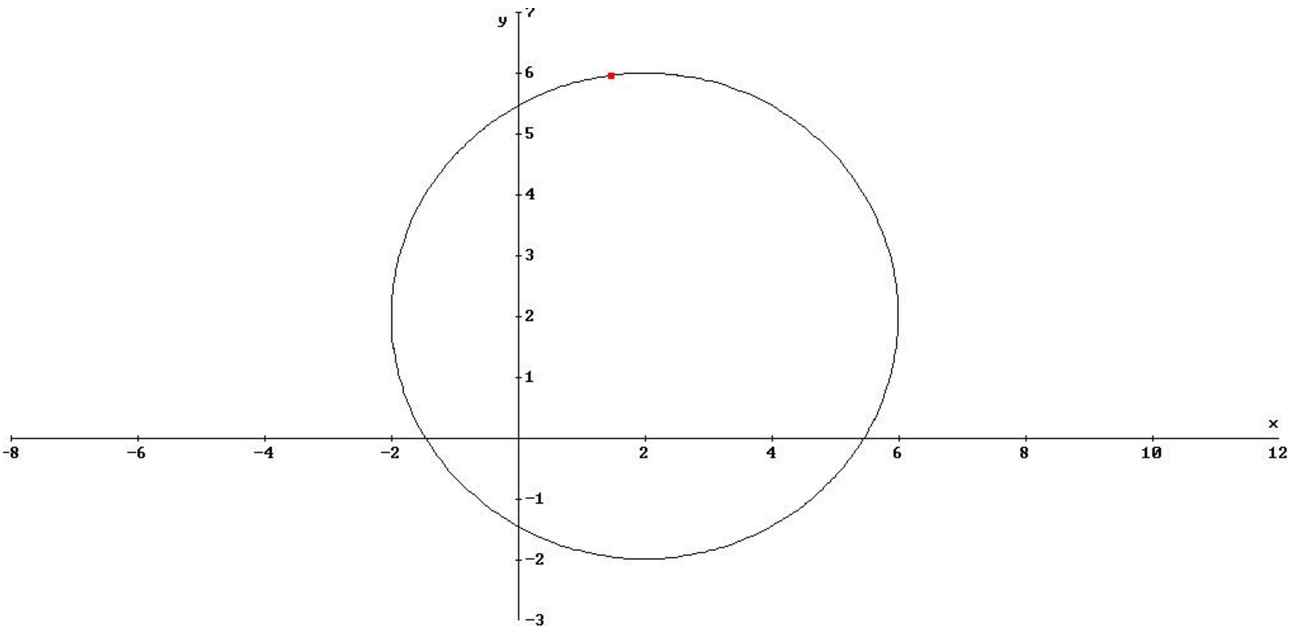
$$y_1 = 1,46 + 4,5$$
$$\Leftrightarrow y_1 = 5,96$$

Første skæringspunkt (1,46;5,96)

$$y_1 = -1,96 + 4,5$$
$$\Leftrightarrow y_1 = 2,54$$

Andet skæringspunkt (-1,96;2,54)

Punkter i cirkelperiferien



Hvis man har et kendt punkt i et koordinatsystem kan man 'teste' om det ligger i cirkelperiferien på en given cirkel ved at indsætte punktet som x og y i cirklen ligning. Til dette eksempel vælges et af skæringspunkterne fra før (1,46;5,96) og cirkel1:

$$4^2 = (1,46-2)^2 + (5,96-2)^2$$
$$\Leftrightarrow 16 = (-0,54)^2 + (3,96)^2$$
$$\Leftrightarrow 16 = 0,29 + 15,71$$
$$\Leftrightarrow 16 = 16$$

Hvis punktet (som her) får udtrykket til at blive sandt, så ligger punktet i cirkelperiferien.

Tangenter til punkter i cirkelperiferien

Hvis en linie er tangent til en cirkel i dennes periferi, så vil denne tangent være vinkelret på en linie som går fra punktet (x_1;y_1) hvor tangenten rører periferien, og ind til centrum af cirklen (x_0;y_0). For hældningerne på disse linier gælder:

$$\alpha_l \cdot \alpha_t = -1$$

Hvor α_l er hældningen på linien som går fra punktet i periferien til centrum. Og α_t er hældningen på tangenten i dette punkt.

Da man i langt de fleste tilfælde kender punktets koordinater, samt cirklen ligning og dermed dennes centrumkoordinater kan man finde hældningen på tangenten. I dette eksempel bruges punktet (1,46;5,96) og cirkel 1 med centrumskoordinaterne (2;2). Hældningen for linien imellem disse punkter er derfor:

$$\alpha_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5,96-2}{1,46-2} = \frac{3,96}{-0,54}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_l = -7,33$$

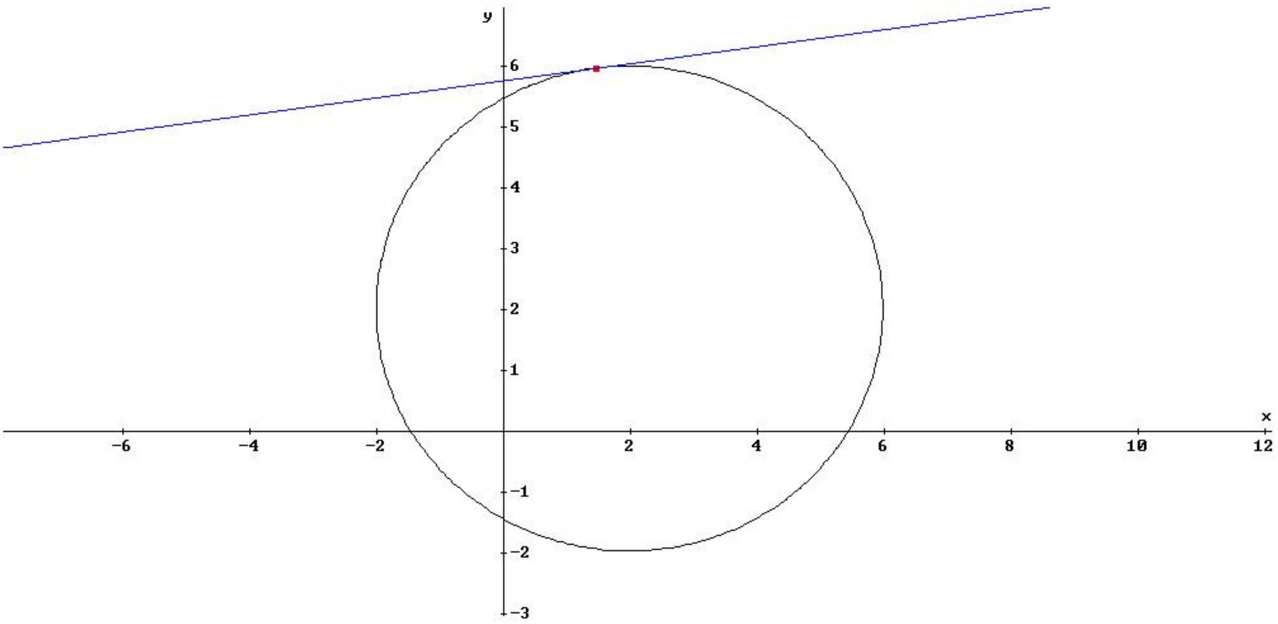
Tangentens hældning bliver derfor:

$$-7,33 \cdot \alpha_t = -1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_t = \frac{-1}{-7,33}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_t = 0,14$$

Ved at bruge punktet og den fundne hældning, kan man udfra tangentformlen lave en forskrift for den rette ligning som er tangent til cirklen 1 i punktet (1,46;5,96):

$$y - y_1 = \alpha_t (x - x_1)$$

$$y - 5,96 = 0,14(x - 1,46)$$
$$\Leftrightarrow y - 5,96 = 0,14x - 0,20$$
$$\Leftrightarrow y = 0,14x + 5,76$$



Slut

De naturvidenskabelige
Jacob Larsen og Martin Gyde Poulsen
Evt. fejl og mangler kan sendes til denaturvidenskabelige@nqrd.dk