Differentialligninger og deres løsninger

Skrevet af Jacob Larsen 3.år HTX Slagelse
Udgivet i samarbejde med Martin Gyde Poulsen 3.år HTX Slagelse

Løsning af følgende differentialligninger:

1) $\frac{dy}{dx} = y \cdot x$ **Løses ved brug af separation af de variable.**

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ **Løses ved brug af separation af de variable.**

3) $\frac{dy}{dx} = y \cdot x + \frac{y}{x}$ **Løses ved brug af separation af de variable.**

4) $\frac{dy}{dx} = -x \cdot y^3$ **Løses ved brug af separation af de variable.**

5) $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{2}}$ **Løses ved brug af separation af de variable.**

6) $\frac{dy}{dx} = x \cdot \ln(x)$ **Løses ved brug af partiel integration.**

7) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-1}$ **Løses ved brug af integration ved substitution.**

Nr. 1

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot x$$

Løsningen

$$\frac{1}{y} \cdot dy = x \cdot dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int x \cdot dx$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\left|y\right|\right) = \tfrac{1}{2}x^2 + k \qquad k \in R$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y|)} = e^{\frac{1}{2}x^2 + k} \qquad k \in R_+$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y|)} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^k$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y|)} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot C \qquad C = e^k$$
$$\Leftrightarrow \left|y\right| = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot C$$
$$\Leftrightarrow y = \pm e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot C$$

Ved at indsætte y = 0 i ligningen ses det at dette er en mulig løsning.

$$\underline{\underline{y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot C}} \qquad C \in R \quad \wedge \quad x \in R$$

<u>Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.</u>

Nr. 2

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

Løsning

$$\frac{1}{y}\cdot dy=\frac{1}{x}\cdot dx \qquad y\neq 0 \quad \wedge \quad x\neq 0$$

$$\int\frac{1}{y}\cdot dy=\int\frac{1}{x}\cdot dx$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\left|y\right|\right)=\ln\left(\left|x\right|\right)+k \qquad k\in R$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(\left|y\right|\right)}=e^{\ln\left(\left|x\right|\right)+k} \qquad k\in R_{+}$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(\left|y\right|\right)}=e^{\ln\left(\left|x\right|\right)}\cdot e^{k}$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(\left|y\right|\right)}=e^{\ln\left(\left|x\right|\right)}\cdot C \qquad C=e^{k} \quad \wedge \quad x\in R$$
$$\Leftrightarrow \left|y\right|=x\cdot C$$

Ved at indsætte y = 0 i ligningen ses det at dette er en mulig løsning.

$$\underline{\underline{y=x\cdot C}} \qquad C\in R \quad \wedge \quad x\in R$$

<u>Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.</u>

Nr. 3

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot x + \frac{y}{x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \left(x + \tfrac{1}{x} \right)$$

Løsning

$$\frac{1}{y} \cdot dy = \left(x + \tfrac{1}{x} \right) \cdot dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \left(x + \tfrac{1}{x} \right) \cdot dx$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\left|y\right|\right) = \tfrac{1}{2} x^2 + \ln\left(\left|x\right|\right) + k \qquad k \in R$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y|)} = e^{\frac{1}{2}x^2 + \ln(|x|) + k} \qquad k \in R_+$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y|)} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{\ln(|x|)} \cdot e^k$$
$$\Leftrightarrow \left|y\right| = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \left|x\right| \cdot C \qquad C = e^k \quad \wedge \quad x \in R$$
$$\Leftrightarrow \left|y\right| = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x \cdot C$$

Ved at indsætte y = 0 i ligningen ses det at dette er en mulig løsning.

$$\underline{\underline{y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x \cdot C}} \qquad C \in R \quad \wedge \quad x \in R$$

Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Nr. 4

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y^3 \qquad y > 0$$

Løsningen

$$\frac{1}{y^3} \cdot dy = -x \cdot dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{1}{y^3} \cdot dy = \int -x \cdot dx$$

Her omskrives udtrykket til:

$$\int y^{-3} \cdot dy = \int -x \cdot dx$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{-3+1} y^{-3+1} = -\tfrac{1}{2} x^2 + C \qquad C \in R$$
$$\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} y^{-2} = -\tfrac{1}{2} x^2 + C$$
$$\Leftrightarrow y^{-2} = -2 \cdot -\tfrac{1}{2} x^2 + C$$
$$\Leftrightarrow y^{-2} = x^2 + C$$
$$\Leftrightarrow \left|y^2\right| = \frac{1}{x^2 + C} \qquad \left(x^2 + C\right) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{\frac{1}{x^2 + C}}$$
$$\Leftrightarrow |y| = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x^2 + C}}$$
$$\Leftrightarrow |y| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + C}}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 + C}}$$

Ved at indsætte y = 0 i ligningen ses det at dette er en mulig løsning.

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + C}} \qquad C \in R \quad \wedge \quad x \in R$$

<u>Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.</u>

Nr. 5

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{2}}$$

Løsningen

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot dy = dx \qquad y \in R_+$$

$$\int \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot dy = \int dx$$

Her omskrives udtrykket til:

$$\int y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \left| \tfrac{1}{-\frac{1}{2}+1} y^{-\frac{1}{2}+1} \right| = x + C \qquad C \in R$$

$$\Leftrightarrow \left| 2y^{\frac{1}{2}} \right| = x + C$$

$$\Leftrightarrow \left| y^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{x+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\left| y^{\frac{1}{2}} \right| \right)^2 = \left(\frac{x+C}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow |y| = \left(\frac{x+C}{2} \right)^2$$

Ved at indsætte y = 0 i ligningen ses det at dette er en mulig løsning.

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{x+C}{2} \right)^2}} \qquad C \in R \quad \wedge \quad x \in R$$

<u>Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.</u>

Nr. 6

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \ln(x)$$

Løsningen

$$y = \int x \cdot \ln(x) dx$$

f(x) = x
g(x) = ln(x)

$$y = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$
$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \int \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \tfrac{1}{x} dx$$
$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \int \tfrac{1}{2} x dx$$
$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} x^2 + C \qquad C \in R$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{4} x^2 + C}} \qquad x \in R$$

Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Nr. 7

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-1} \qquad (x-1) > 0$$

Løsningen

$$y = \int \sqrt{x-1}dx$$

$$t = x-1$$
$$\frac{dt}{dx} = 1$$
$$dt = dx$$

$$y = \int \sqrt{t}dt$$
$$\Leftrightarrow y = \tfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C \qquad C \in R$$

Nu genindsættes t i udtrykket:

$$\underline{\underline{y = \tfrac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}} + C}} \qquad C \in R \quad \wedge \quad x \in R$$

<u>Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.</u>

Slut

De naturvidenskabelige
Jacob Larsen og Martin Gyde Poulsen
Evt. fejl og mangler kan sendes til gyde@rudekuvert.dk