Skalarprodukt i rum

Skrevet af Jacob Larsen 3.år HTX Slagelse
Udgivet i samarbejde med Martin Gyde Poulsen 3.år HTX Slagelse

Skalarprodukt i rum

Skalarproduktet kendes fra andet år. Det eneste nye er at der nu er tre koordinater til hvert punkt, herved bliver formlen og beviset lidt større.

Det drejer sig som sagt om to linier i rummet samt vinklen imellem dem.

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Definitionen på skalarproduktet mellem vektor *a* og *b*:

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos(v)$$

Det eneste som man bør være opmærksom på ved skalarprodukt er, at såfremt skalaren bliver nul, så er de to linier som vektorerne *a* og *b* danner.

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos(90)$$
$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot 0$$
$$\overline{a} \bullet \overline{b} = 0$$

Officielt skriver man:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \bullet \overline{b} = 0$$

Regneregler for skalarproduktet

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \overline{b} \bullet \overline{a}$$
$$\overline{a} \bullet \left(\overline{b} + \overline{c} + \overline{d}\right) = \overline{a} \bullet \overline{b} + \overline{a} \bullet \overline{c} + \overline{a} \bullet \overline{d}$$
$$\left(s \cdot \overline{a}\right) \bullet \left(t \cdot \overline{b}\right) = (s \cdot t) \cdot \left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right) \quad s, t \in R$$
$$\overline{a} \bullet \overline{a} = \left|\overline{a}\right|^2$$

Af udledningen af skalarproduktet, som blev gennemgået på andet år, fremkom en anden skrive-måde, som muliggjorde at man kunne udregne skalarproduktet:

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Bevis

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \left(x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}\right) \bullet \left(x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{a} \bullet \bar{b} = \left(x_1 \cdot \bar{i}\right) \bullet \left(x_2 \cdot \bar{i}\right) + \left(x_1 \cdot \bar{i}\right) \bullet \left(y_2 \cdot \bar{j}\right) + \left(x_1 \cdot \bar{i}\right) \bullet \left(z_2 \cdot \bar{k}\right) + \left(y_1 \cdot \bar{j}\right) \bullet \left(x_2 \cdot \bar{i}\right) + \left(y_1 \cdot \bar{j}\right) \bullet \left(y_2 \cdot \bar{j}\right) + \left(y_1 \cdot \bar{j}\right) \bullet \left(z_2 \cdot \bar{k}\right) +$$
$$\left(z_1 \cdot \bar{k}\right) \bullet \left(x_2 \cdot \bar{i}\right) + \left(z_1 \cdot \bar{k}\right) \bullet \left(y_2 \cdot \bar{j}\right) + \left(z_1 \cdot \bar{k}\right) \bullet \left(z_2 \cdot \bar{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{a} \bullet \bar{b} = \left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot \left(\bar{i} \bullet \bar{i}\right) + \left(x_1 \cdot y_2\right) \cdot \left(\bar{i} \bullet \bar{j}\right) + \left(x_1 \cdot z_2\right) \cdot \left(\bar{i} \bullet \bar{k}\right) + \left(y_1 \cdot x_2\right) \cdot \left(\bar{j} \bullet \bar{i}\right) + \left(y_1 \cdot y_2\right) \cdot \left(\bar{j} \bullet \bar{j}\right) + \left(y_1 \cdot z_2\right) \cdot \left(\bar{j} \bullet \bar{k}\right) +$$
$$\left(z_1 \cdot x_2\right) \cdot \left(\bar{k} \bullet \bar{i}\right) + \left(z_1 \cdot y_2\right) \cdot \left(\bar{k} \bullet \bar{j}\right) + \left(z_1 \cdot z_2\right) \cdot \left(\bar{k} \bullet \bar{k}\right)$$

Følgende gæler ifølge regnereglerne for skalarprodukter, da enhedsvektorerne alle er vinkelrette på hinanden:

$$\bar{i} \bullet \bar{i} = 1$$
$$\bar{j} \bullet \bar{j} = 1$$
$$\bar{k} \bullet \bar{k} = 1$$

$$\bar{i} \bullet \bar{j} = \bar{j} \bullet \bar{i} = 0$$
$$\bar{j} \bullet \bar{k} = \bar{k} \bullet \bar{j} = 0$$
$$\bar{i} \bullet \bar{k} = \bar{i} \bullet \bar{j} = 0$$

Derfor findes skalarproduktet nu til at være:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot 1 + \left(x_1 \cdot y_2\right) \cdot 0 + \left(x_1 \cdot z_2\right) \cdot 0 + \left(y_1 \cdot x_2\right) \cdot 0 + \left(y_1 \cdot y_2\right) \cdot 1 + \left(y_1 \cdot z_2\right) \cdot 0 + \left(z_1 \cdot x_2\right) \cdot 0 + \left(z_1 \cdot y_2\right) \cdot 0 + \left(z_1 \cdot z_2\right) \cdot 1$$
$$\Leftrightarrow \bar{a} \bullet \bar{b} = \left(x_1 \cdot x_2\right) + \left(y_1 \cdot y_2\right) + \left(z_1 \cdot z_2\right)$$
$$\Leftrightarrow \bar{a} \bullet \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Q.E.D

Eksempler

Skalarprodukt

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2$$
$$\overline{a} \bullet \overline{b} = -2 + 16 + 2$$
$$\overline{a} \bullet \overline{b} = 16$$

Vinklen mellem to vektorer

Dette kan gøres ved at bruge definitionen på, hvori man isolerer vinklen *v*, således:

$$\cos(v) = \frac{\overline{a} \bullet \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{a} \bullet \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}\right)$$

Og dermed fås:

$$\cos(v) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

Slut

De naturvidenskabelige
Jacob Larsen og Martin Gyde Poulsen
Evt. fejl og mangler kan sendes til denaturvidenskabelige@nqrd.dk