Opgaver til Maple kursus 2012

Jonas Camillus Jeppesen, jojep07@student.sdu.dk
Martin Gyde Poulsen, gyde@nqrd.dk

October 7, 2012

1 Indledende opgaver

Opgave 1

Udregn følgende regnestykker:

(a) $2342 + 1345$ [svar: 3687]

(b) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \frac{6}{2}$ [svar: 18]

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ [svar: $\frac{3}{4}$]

(d) $10^2 - 2$ [svar: 98]

Opgave 2

Udregn/vis følgende som decimaltal

(a) $\cos(2)$ [svar: $-0.4161...$]

(b) $\sin(3)$ [svar: 0.1411...]

(c) $\frac{1}{3}$ [svar: 0.3333...]

(d) π [svar: 3.1415...]

Opgave 3

Opret variabler og tildel dem følgende værdier:

(a) variabel 'k1', værdi '4'

(b) variabel 'k2', værdi '$\frac{1}{3}$'

(c) variabel 'k3', værdi '$\frac{555}{5} + \frac{33}{3}$'

(d) variabel 'lign1', værdi '$x^2 + 4$'

Opgave 4

Opskriv følgende regnestykker vha. variablene fra *Opgave 4* (og. evt. andre tal):

(a) $\frac{1}{3} + 4^2$ [svar: $\frac{49}{3}$]

(b) $4 + 122$ [svar: 126]

(c) $\frac{1}{3} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot 4$ [svar: $\frac{1}{3} \cdot x^4 + \frac{4}{3}$]

2 Kommandoopgaver

Opgave 1

Udregn følgende som decimaltal

(a) $\sqrt{3}$ [svar: 1.732...]

(b) $\ln(100)$ [svar: 4.605...]

(c) $\log_{10}(100)$ [svar: 2]

(d) e^6 [svar: 403.42...]

Opgave 2

Find den afledte af følgende funktioner:

(a) $a \cdot x + b$ [svar: a]

(b) $3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ [svar: $6 \cdot x + 2$]

(c) $\sqrt{x}$ [svar: $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$]

Opgave 3

Udregn integralet af følgende funktioner:

(a) $f(x) = a \cdot x + b)$ [svar: $\frac{1}{2}ax^2 + bx$]

(b) $g(x) = 3 \cdot x^2 + 2$ [svar: $x^3 + x^2$]

(c) $h(x) = \sqrt{x}$ [svar: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$]

Opgave 4

Løs følgende ligninger:

1. Løs $x^3 = 2x^2$ mht. x [svar: $x = 0, 0, 2$]
2. Løs $\sqrt{x} + 1 = 10$ mht. x [svar: $x = 81$]
3. Løs $x + y + 1 = 2$ og $3x + y = 2$ mht. x og y [svar: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$]

Opgave 5

Plot følgende funktioner:

(a) $y_1 = x^2$ i området $x = [-5..5]$

(b) $y_2 = x^2 + 3$ i området $x = [-10, 10]$ og $y = [-2, 10]$, og tegn en firkant omkring skæringen med y-aksen.

(c) $y_3 = \cos(x)$ og $y_4 = \sin(x)$ i samme koordinatsystem i området $x = [-2\pi, 2\pi]$

3 Optimer volumen af foldet æske

En æske (uden låg) ønskes foldet af et stykke A4 papir. Æsken foldes ved at klippe et kvadrat med sidelængde x ud af hvert hjørne og folde de fire fremkommende sider op. A4 arket har dimensionerne 297mm x 210mm.

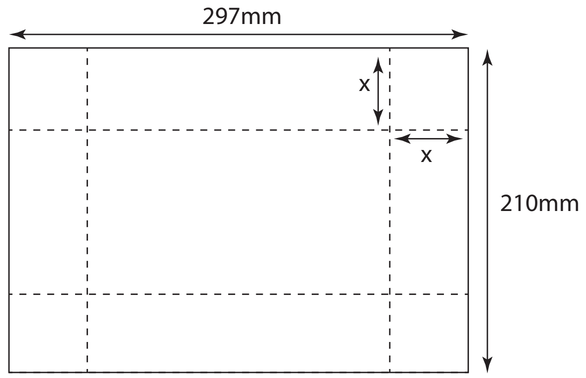


Figure 1: En skitse af A4 papiret. De stiplede linier markerer hvor der skal klippes og foldes.

Voluminet af kassen som funktion af x kan beskrives ved følgende funktion

$$V(x) = (297mm - 2x) \cdot (210mm - 2x) \cdot x \tag{1}$$

(a) Differentier $V(x)$ og skitser $\frac{dV}{dx}$ $(V'(x))$ samt $V(x)$.

(b) Bestem den optimale størrelse af x, således at voluminet af æsken bliver *størst* muligt.

(c) Bestem æskens maksimale voluminen i mm^3.

3.1 Løsning i hånden

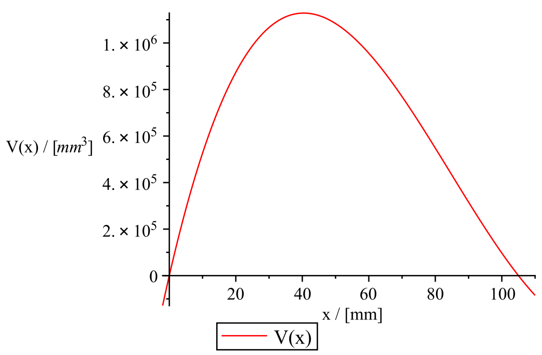
(a) Funktionen forsimples først:

$$V(x) = (297mm - 2x) \cdot (210mm - 2x) \cdot x$$
$$V(x) = 62370mm^2 \cdot x - 1014mm \cdot x^2 + 4x^3$$

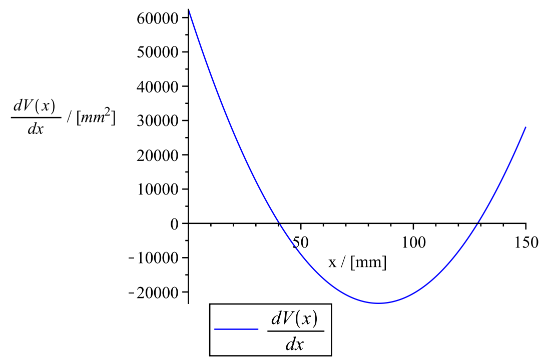
Den forsimplede funktion differentieres (afledes) nu

$$\frac{dV(x)}{dx} = V'(x) = 62370mm^2 - 2 \cdot 1014mm \cdot x + 3 \cdot 4x^2$$
$$\frac{dV(x)}{dx} = 62370mm^2 - 2028mm \cdot x + 12x^2$$

og begge funktioner plottes



(a)



(b)

Figure 2

(b) Den afledte funktion sættes nu lig nul og den fremkomne ligning løses mht. x:

$$\frac{dV(x)}{dx} = 62370mm^2 - 2028mm \cdot x + 12x^2 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2028mm^2 \pm \sqrt{(2028mm)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 62370mm^2}}{2 \cdot 12}$$
$$x = \{128.47mm, 40.42mm\}$$

Af de to løsninger er $x = 40.42mm$ den korrekte løsning, da $0 < x < 105mm$.

(c) Æskens maksimale volumen findes ved at evaluere den oprindelige funktion $V(x)$ i den optimale x-værdi $x = 40.42$:

$$V(40.42mm) = 62370mm^2 \cdot 40.42mm - 1014mm \cdot (40.42mm)^2 + 4 \cdot (40.42mm)^3 = 1.13 \cdot 10^6 mm^3 \tag{2}$$

3.2 Skitseret løsning i Maple

Opgaven f.eks. løses på følgende måde i Maple:

(a) 1 Definér funktionen $V(x)$ som et udtryk (`v := ...`).

2 *Valgfrit:* Brug evt. `expand()` eller `simplify()` til at få udtrykket se mere overskueligt ud. Det har ingen betydning for løsning af opgaven, men kan være rart for øjnene.

3 Differentier (afled) udtrykket `V` vha. Maple kommandoen `diff()` og gem resultatet over i et nyt udtryk `dv`.

4 *Valgfrit:* Brug evt. `expand()` eller `simplify()` til at få funktionen til at se mere genkendelig ud.

5 Plot nu udtrykkene `v` og `dv` vha. Maple kommandoen `plot()`.

(b) 6 Løs ligningen $\frac{dV(x)}{dx} = 0$ vha. af Maple kommandoen `solve()` og gem løsningerne over i en variabel `rts`. Husk $\frac{dV(x)}{dx}$ er gemt som udtrykket `dv` hvis du har brugt den forslåede navngivning.

(c) 7 Evaluer funktionen $V(x)$ i den optimale x-værdi. Husk at den optimale x-værdi ligger gemt i variablen `rts[1]` eller `rts[2]` så den kan indsættes i `v` vha. Maple kommandoen `eval()`.

4 Areal under kurven

To funktioner er givet ved:

$$f(x) = -x^2 + 5x + 3$$
$$g(x) = x^2$$

De to funktioner afgrænset en areal M i 1. og 2. kvadrant.

(a) Skitser de to grafer og udpeg arealet M.

(b) Bestem arealet M.

4.1 Løsning i hånden

(a) De to funktioner ser ud som følger og arealet M er market som arealet mellem de to kurver i 1. og 2. kvadrant:

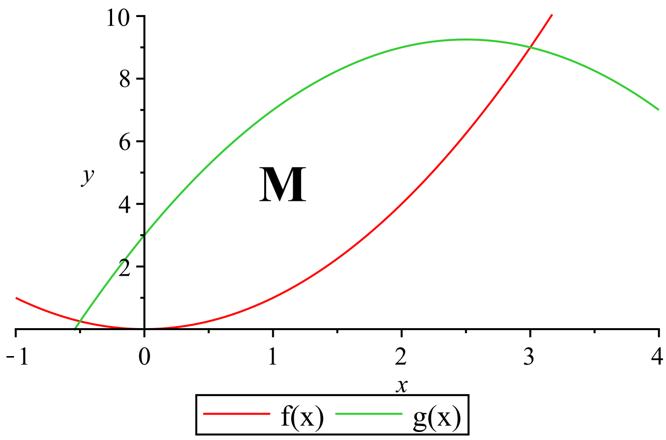


Figure 3

(b) Arealet mellem de to kurver findes som $\int_k^j f(x) - g(x)dx$ hvor de to grænser j og k er x-værdien til de to skæringspunkter mellem $f(x)$ og $g(x)$.

Først findes skæringspunkterne:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -x^2 + 5x + 3 &= x^2 \\ -2x^2 + 5x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} \\ x &= \frac{-5 \pm 7}{-4} = \{-\frac{1}{2}, 3\} \end{aligned}$$

Altså skal grænserne være $k = -\frac{1}{2}$ og $j = 3$ og integralet der bliver:

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (-x^2 + 5x + 3 - x^2)dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (-2x^2 + 5x + 3)dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-\frac{1}{2}}^{3} \\
&= -\frac{2}{3}3^3 + \frac{5}{2}3^2 + 3 \cdot 3 - (-\frac{2}{3}(\frac{-1}{2})^3 + \frac{5}{2}(\frac{-1}{2})^2 + 3 \cdot \frac{-1}{2}) \\
M &= \frac{343}{24}
\end{aligned}
$$

4.2 Skitseret løsning i Maple

(a) 1 Definer funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ som to udtryk `f := ..` og `g := ...`

2 Plot de to udtryk `f` og `g` vha. Maple kommandoen `plot()`.

(b) 3 Løs ligningen $f(x) = g(x)$ mht. x (`f = g`) vha. Maple kommandoen `solve()` og gem løsningerne over i en variabel `res` så resultaterne nemt kan indsættes i integralet i næste skridt.

4 Udregn integralet $\int_k^j f(x) - g(x)dx$ vha. Maple kommandoen `int()`. Husk at de to grænser (x-koordinaterne til skæringspunkterne mellem $f(x)$ og $g(x)$) ligger gemt som `res[1]` og `res[2]` og, at de kan indsættes som grænser i `int()` kommandoen.

5 Vækst af en cellekultur

En given cellekultur vokser med en hastighed/rate proportional med antallet af celler i kulturen. Antallet af celler i cellekulturen som funktion af tiden $n(t)$ beskrives altså ved en differentialligning

$$\frac{dn(t)}{dt} = n'(t) = k \cdot n(t)$$

hvor k er en konstant. Til et givent tidspunkt ($t = t_0 = 0$) indeholdte cellekulturen 42 celler. 4 timer senere (t = 4) indeholdte cellekulturen 60 celler.

(a) Bestem funktionen $n(t)$ ved at løse differentialligningen og benytte begyndelsesbetingelserne.

(b) Beregn hvor mange celler der vil være efter yderligere 20 timer.

5.1 Løsning i hånden

(a) Differentialligninger af formen $y'(t) = k \cdot y(t)$ har løsninger af formen $y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$ hvor $y_0 = y(0)$. Derfor er $n(t)$ også givet ved denne form:

$$n(t) = n_0 \cdot e^{k \cdot t} = n(0) \cdot e^{k \cdot t}$$

Nu kan vi anvender informationen om at $n_0 = n(t_0) = n(0) = 42$ og $n(4) = 60$ til at bestemme konstanten k:

$$
\begin{aligned}
n(t) &= n_0 \cdot e^{k \cdot t} = 42 \cdot e^{k \cdot t} \\
n(4) &= 42 \cdot e^{k \cdot 4} = 60 \\
60 &= 42 \cdot e^{k \cdot 4} \\
\frac{60}{42} &= e^{k \cdot 4} \\
\ln \frac{60}{42} &= k \cdot 4 \\
k &= \ln \left(\frac{60}{42} \right) \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen er derfor

$$n(t) = 42 \cdot e^{\ln\left(\frac{60}{42}\right)\frac{1}{4} \cdot t} = 42 \cdot e^{0.089 \cdot t}$$

(b) Antallet af celler i cellekulturen fåes ved at evaluere funktionen $n(t)$ til en given tid. "'Efter yderligere 20 timer"' betyder til en tid $t = 20 + 4 = 24$ timer. Altså er der $n(24)$ celler til efter yderligere 20 timer (24 timer i alt):

$$n(24) = 42 \cdot e^{0.089 \cdot 24} \approx 355$$

Så på 24 timer er cellekulturen altså vokset fra 42 celler til 355 celler.

5.2 Skitseret løsning i Maple

(a) 1 Definer differentialligningen vha. Maple kommandoen `diff()` og gem den i en variabel `de`

2 Definer begyndelsesbetingelserne og gem dem i en variabel `condi`

3 Løs differentialligningen vha. Maple kommandoen *dsolve*(). Gem den resulterende højreside af resultatet over i en variabel `n` vha. Maple kommandoen `rhs()`

4 `n` indeholder nu udtrykket for $n(t)$. Skriv `n;` på en ny linie og tryk enter. Maple vil nu vise dig hvad der er gemt i `n` og det er et udtryk som indeholder konstanten k som endnu mangler at blive bestemt.

5 Løs ligningen $n(4) = 60$ vha. Maple kommandoerne `solve()` og `eval()`. Gem resultatet over i en konstant `k`

6 Tjek igen indholdet af `n` ved at skrive `n;` og tryk enter. Nu ser du at udtrykket for k er sat ind på k's plads i udtrykket.

(b) 7 Evaluer udtrykket for $n(t)$ i $t = 24$ vha. af Maple kommandoen `eval()`