Opgaver til Maple kursus 2012

Jonas Camillus Jeppesen, jojep07@student.sdu.dk
Martin Gyde Poulsen, gyde@nqrd.dk

October 3, 2013

1 Indledende opgaver

1.1

Udregn følgende regnestykker:

(a) $2342 + 1345$ [svar: 3687]

(b) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \frac{6}{2}$ [svar: 18]

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ [svar: $\frac{3}{4}$]

(d) $10^2 - 2$ [svar: 98]

1.2

Udregn/vis følgende som decimaltal

(a) $\cos(2)$ [svar: $-0.4161...$]

(b) $\sin(\frac{\pi}{4})$ [svar: 0.7071...]

(c) $\frac{1}{3}$ [svar: 0.3333...]

(d) π [svar: 3.1415...]

1.3

Opret variabler og tildel dem følgende værdier:

(a) variabel 'k', værdi 'x^2'

(b) variabel 'ratio', værdi '$\frac{1}{3}$'

(c) variabel 'eq1', værdi '`ratio * k + 4`'

(d) variabel 'eq2', værdi '`k^2 + k`'

2 Kommandoopgaver

2.1

Udregn følgende som decimaltal

(a) $\sqrt{3}$ [svar: 1.732...]

(b) $\ln(100)$ [svar: 4.605...]

(c) $\log_{10}(100)$ [svar: 2]

(d) e^{ratio}, hvor `ratio` er variablen fra opgaven 1.3 [svar: 1.395...]

2.2

Find den afledte af følgende funktioner:

(a) $f(x) = a \cdot x + b$ [svar: a]

(b) $g(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ [svar: $6 \cdot x + 2$]

(c) $h(x) = \text{eq1}$, hvor `eq1` er variablen fra opgaven 1.3 [svar: $\frac{2}{3}x$]

2.3

Udregn det ubestemte integrale af følgende funktioner:

(a) $f(x) = a \cdot x + b$ [svar: $\frac{1}{2}ax^2 + bx$]

(b) $g(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ [svar: $x^3 + x^2$]

(c) $h(x) = \text{eq1}$, hvor `eq1` er variablen fra opgaven 1.3 [svar: $\frac{1}{9}x^3 + 4x$]

(d) $i(x) = \text{eq2}$, hvor `eq2` er variablen fra opgaven 1.3 [svar: $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$]

2.4

Løs følgende ligninger:

1. Løs $x^3 = 2x^2$ mht. x [svar: $x = \{0, 0, 2\}$]
2. Løs $\text{eq1} = 16$ mht. x, hvor `eq1` er variablen fra opgaven 1.3 [svar: $x = \{6, -6\}$]
3. Løs $x + y + 1 = 2$ og $3x + y = 2$ mht. x og y [svar: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$]

2.5

Plot følgende funktioner:

(a) $y_1 = \text{eq1}$ i området $x = [-5..5]$, hvor `eq1` er variablen fra opgaven 1.3.

(b) $y_2 = x^2 - 1$ i området $x = [-4, 4]$ og $y = [-2, 10]$, og tegn en firkant omkring skæringen med y-aksen.

(c) $y_3 = \cos(x)$ og $y_4 = \sin(x)$ i samme koordinatsystem i området $x = [-2\pi, 2\pi]$.

2.6

En funktion f er givet ved $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Definér $f(x)$ som en variabel. Beregn $f(2)$ (svar: 9) og $f(10)$ (svar: 193). Til at gøre dette skal I bruge Maple kommandoen `eval()` som ikke er blevet gennemgået. Slå den op i Maples hjælp (se evt. cheat sheet for genvej) og lær hvordan man bruger kommandoen.

2.7

Opret en variabel `answer` med værdi $3y^2 = 2x^2 + x + 3$. Brug kommandoerne `rhs()` og `lhs()` til at gemme højresiden (svar: $2x^2 + x + 3$) hhv. venstresiden (svar: $3y^2$) af `answer` over i to nye variable (find selv på navne).

3 Optimér volumenet af en foldet æske

En æske (uden låg) ønskes foldet af et stykke A4 papir. Æsken foldes ved at klippe et kvadrat med sidelængde x ud af hvert hjørne og folde de fire fremkommende sider op. A4 arket har dimensionerne 297mm x 210mm.

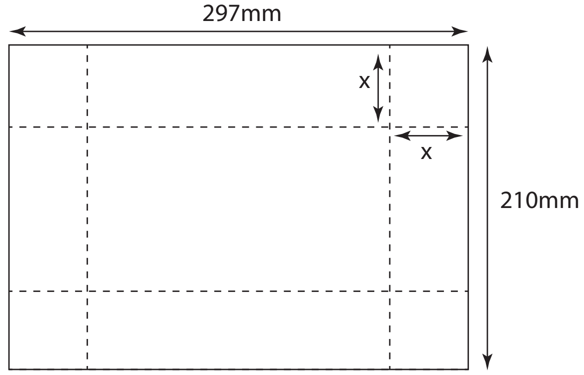


Figure 1: En skitse af A4 papiret. De stiplede linier markerer hvor der skal klippes og foldes.

Voluminet af kassen som funktion af x kan beskrives ved følgende funktion

$$V(x) = (297mm - 2x) \cdot (210mm - 2x) \cdot x \tag{1}$$

(a) Differentier $V(x)$ og skitser $\frac{dV}{dx}$ ($V'(x)$) samt $V(x)$.

(b) Bestem den optimale størrelse af x, således at voluminet af æsken bliver *størst* muligt.

(c) Bestem æskens maksimale voluminen i mm^3.

3.1 Løsning i hånden

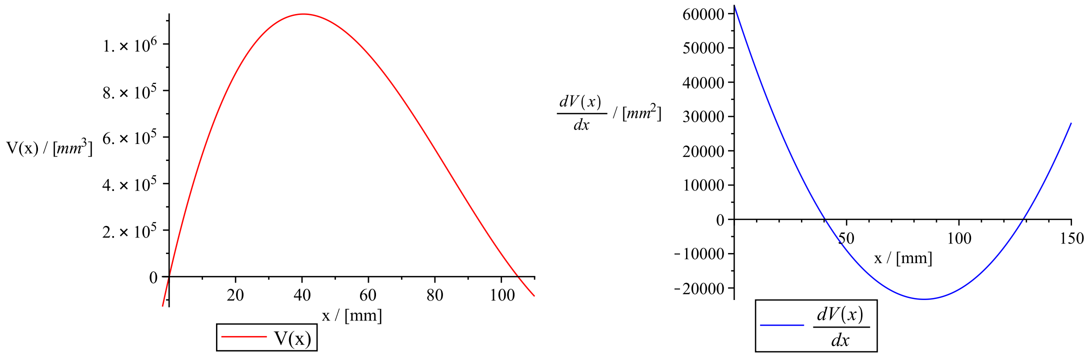
(a) Funktionen forsimples først:

$$V(x) = (297mm - 2x) \cdot (210mm - 2x) \cdot x$$
$$V(x) = 62370mm^2 \cdot x - 1014mm \cdot x^2 + 4x^3$$

Den forsimplede funktion differentieres (afledes) nu

$$\frac{dV(x)}{dx} = V'(x) = 62370mm^2 - 2 \cdot 1014mm \cdot x + 3 \cdot 4x^2$$
$$\frac{dV(x)}{dx} = 62370mm^2 - 2028mm \cdot x + 12x^2$$

og begge funktioner plottes



(a) (b)

Figure 2

(b) Den afledte funktion sættes nu lig nul og den fremkomne ligning løses mht. x:

$$\frac{dV(x)}{dx} = 62370mm^2 - 2028mm \cdot x + 12x^2 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2028mm^2 \pm \sqrt{(2028mm)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 62370mm^2}}{2 \cdot 12}$$
$$x = \{128.47mm, 40.42mm\}$$

Af de to løsninger er $x = 40.42mm$ den korrekte løsning, da $0 < x < 105mm$.

(c) Æskens maksimale volumen findes ved at evaluere den oprindelige funktion $V(x)$ i den optimale x-værdi $x = 40.42$:

$$V(40.42mm) = 62370mm^2 \cdot 40.42mm - 1014mm \cdot (40.42mm)^2 + 4 \cdot (40.42mm)^3 = 1.13 \cdot 10^6 mm^3 \quad (2)$$

3.2 Skitseret løsning i Maple

Opgaven f.eks. løses på følgende måde i Maple:

(a) 1 Definér funktionen $V(x)$ som en variabel (`v := ...`).

2 *Valgfrit:* Brug evt. `expand()` til at få udtrykket se mere overskueligt ud. Det har ingen betydning for løsning af opgaven, men kan være rart for øjnene.

3 Beregn $\frac{dV(x)}{dx}$ vha. Maple kommandoen `diff()` og gem resultatet over i en ny variabel `dv`. Husk, at $V(x)$ ligger gemt i en variablen `v`.

4 *Valgfrit:* Brug evt. `expand()` til at få udtrykket til at se mere genkendeligt ud.

5 Plot nu udtrykkene $V(x)$ og $\frac{dV(x)}{dx}$ vha. Maple kommandoen `plot()`. Husk de to funktioner ligger gemt som `v` og `dv`.

(b) 6 Løs ligningen $\frac{dV(x)}{dx} = 0$ mht. x vha. Maple kommandoen `solve()` og gem løsningerne over i en variabel `res`. Husk, at $\frac{dV(x)}{dx}$ er gemt som `dv`.

7 *Valgfrit:* Brug evt. `evalf()` til at se de to løsninger for x som decimaltal.

(c) 8 Evaluér funktionen $V(x)$ i den optimale x-værdi. Husk, at den optimale x-værdi ligger gemt i variablen `res[1]` eller `res[2]`. Den kan indsættes i for $V(x)$ vha. Maple kommandoen `eval()`.

4 Areal mellem to kurver

To funktioner er givet ved:

$$f(x) = -x^2 + 5x + 3$$
$$g(x) = x^2$$

De to funktioner afgrænset en areal M i 1. og 2. kvadrant.

(a) Skitser de to grafer og udpeg arealet M.

(b) Bestem arealet M.

4.1 Løsning i hånden

(a) De to funktioner ser ud som følger og arealet M er market som arealet mellem de to kurver i 1. og 2. kvadrant:

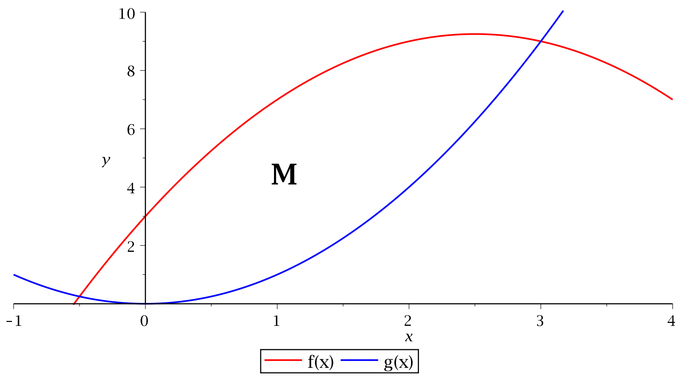


Figure 3

(b) Arealet mellem de to kurver findes som $\int_k^j f(x) - g(x)dx$ hvor de to grænser j og k er x-værdien til de to skæringspunkter mellem $f(x)$ og $g(x)$.

Først findes skæringspunkterne:

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 5x + 3 = x^2$$
$$-2x^2 + 5x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)}$$
$$x = \frac{-5 \pm 7}{-4} = \{-\frac{1}{2}, 3\}$$

Altså skal grænserne være $k = -\frac{1}{2}$ og $j = 3$ og integralet der bliver:

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (-x^2 + 5x + 3 - x^2)dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (-2x^2 + 5x + 3)dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x\right]_{-\frac{1}{2}}^{3} \\
&= -\frac{2}{3}3^3 + \frac{5}{2}3^2 + 3 \cdot 3 - (-\frac{2}{3}(\frac{-1}{2})^3 + \frac{5}{2}(\frac{-1}{2})^2 + 3 \cdot \frac{-1}{2}) \\
M &= \frac{343}{24}
\end{aligned}
$$

4.2 Skitseret løsning i Maple

(a) 1 Definér funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ som to variable (`f := ...` og `g := ...`).

2 Plot de to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ vha. Maple kommandoen `plot()`. Husk, at $f(x)$ og $g(x)$ ligger gemt som `f` og `g`.

(b) 3 Løs ligningen $f(x) = g(x)$ mht. x vha. Maple kommandoen `solve()` og gem løsningerne over i en variabel `res` så resultaterne nemt kan indsættes i integralet i næste skridt. Husk, at $f(x)$ og $g(x)$ ligger gemt som `f` og `g`.

4 Udregn integralet $\int_k^j f(x) - g(x)dx$ vha. Maple kommandoen `int()`. Husk at de to grænser (x-koordinaterne til skæringspunkterne mellem $f(x)$ og $g(x)$) ligger gemt som `res[1]` og `res[2]` og, at de kan indsættes som grænser i `int()` kommandoen.

5 Vækst af en cellekultur

En given cellekultur vokser med en hastighed/rate proportional med antallet af celler i kulturen. Antallet af celler i cellekulturen som funktion af tiden $n(t)$ beskrives altså ved en differentialligning

$$\frac{dn(t)}{dt} = n'(t) = k \cdot n(t)$$

hvor k er en konstant. Til et givent tidspunkt ($t = t_0 = 0$) indeholdte cellekulturen 42 celler. 4 timer senere (t = 4) indeholdte cellekulturen 60 celler.

(a) Bestem funktionen $n(t)$ ved at løse differentialligningen og benytte begyndelsesbetingelserne.

(b) Beregn hvor mange celler der vil være efter yderligere 20 timer.

5.1 Løsning i hånden

(a) Differentialligninger af formen $y'(t) = k \cdot y(t)$ har løsninger af formen $y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$ hvor $y_0 = y(0)$. Derfor er $n(t)$ også givet ved denne form:

$$n(t) = n_0 \cdot e^{k \cdot t} = n(0) \cdot e^{k \cdot t}$$

Nu kan vi anvender informationen om at $n_0 = n(t_0) = n(0) = 42$ og $n(4) = 60$ til at bestemme konstanten k:

$$
\begin{aligned}
n(t) = n_0 \cdot e^{k\cdot t} &= 42 \cdot e^{k\cdot t} \\
n(4) = 42 \cdot e^{k\cdot 4} &= 60 \\
60 &= 42 \cdot e^{k\cdot 4} \\
\frac{60}{42} &= e^{k\cdot 4} \\
\ln \frac{60}{42} &= k \cdot 4 \\
k &= \ln\left(\frac{60}{42}\right)\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen er derfor

$$n(t) = 42 \cdot e^{\ln\left(\frac{60}{42}\right)\frac{1}{4}\cdot t} = 42 \cdot e^{0.089\cdot t}$$

(b) Antallet af celler i cellekulturen fåes ved at evaluere funktionen $n(t)$ til en given tid. "'Efter yderligere 20 timer"' betyder til en tid $t = 20 + 4 = 24$ timer. Altså er der $n(24)$ celler til efter yderligere 20 timer (24 timer i alt):

$$n(24) = 42 \cdot e^{0.089\cdot 24} \approx 355$$

Så på 24 timer er cellekulturen altså vokset fra 42 celler til 355 celler.

5.2 Skitseret løsning i Maple

(a) 1 Definér differentialligningen vha. Maple kommandoen `de := diff(n(t),t)=k*n(t);`

2 Definér begyndelsesbetingelserne vha. Maple kommandoen `ics := y(0)=42;`

3 Løs differentialligningen vha. Maple kommandoen *dsolve*(). Gem højresiden af resultatet over i en variabel `n` vha. Maple kommandoen `rhs()`

4 `n` indeholder nu udtrykket for $n(t)$. Skriv `n;` på en ny linie og tryk enter. Maple vil nu vise dig hvad der er gemt i `n` og det er et udtryk som indeholder konstanten k som endnu mangler at blive bestemt.

5 Løs ligningen $n(4) = 60$ vha. Maple kommandoerne `solve()` og `eval()`. Gem resultatet over i en konstant `k`

6 Tjek igen indholdet af `n` ved at skrive `n;` og tryk enter. Nu ser du at udtrykket for k er sat ind på k's plads i udtrykket.

(b) 7 Evaluer udtrykket for $n(t)$ i $t = 24$ vha. af Maple kommandoen `eval()`